

基于 Copula 函数的川江干支流洪水遭遇分析

李继清 谢宇韬 侯宇¹

(华北电力大学 水利与水电工程学院, 北京 102206)

【摘要】: 干支流洪水遭遇加剧了江河的防洪形势, 分析干支流洪水的遭遇情况, 对于充分利用流域梯级水库的防洪库容, 减少下游洪灾损失具有重要意义。目前的洪水遭遇分析大多采用实测资料统计, Copula 函数因其灵活有效性被陆续应用到其中。为合理制定川江联合防洪调度方式, 减轻川江河段防洪压力, 采用川江干流朱沱站、寸滩站和嘉陵江北碚站、乌江武隆站多年实测资料, 通过混合 Von Mises 分布和 P-III 型分布拟合年最大洪水发生时间和洪水量级, 引入 Archimedean Copula 函数分别构建干流与支流、支流与支流间的联合分布, 对川江干支流洪水遭遇的可能性进行了分析。研究表明: 川江干支流千年一遇洪水发生遭遇的概率较低, 川江干流与嘉陵江洪水发生遭遇的概率较高且量级较大, 乌江与川江干流、嘉陵江发生遭遇的概率较低且量级较小。

【关键词】: 洪水遭遇分析 Copula 函数 洪水发生时间 洪水量级

【中图分类号】: TV122 **【文献标识码】:** A **【文章编号】:** 1004-8227(2021)05-1275-09

洪涝灾害是我国发生最频繁且影响最大的自然灾害, 而干支流洪水遭遇使得下游的防洪形势更加严峻, 给人民的生命财产安全带来了更大的威胁。现有对洪水遭遇情况的研究多采用对多年实测资料进行统计分析的方法^[1,2]。熊莹^[3]通过统计洪水遭遇次数、时间和等级从洪峰和洪量角度分析了川江干流干支流洪水组成和遭遇情况。张新田^[4]等基于雅砻江小得石站、川江李庄站、寸滩站多年实测资料对雅砻江与川江洪水地区组成及遭遇规律进行了分析。统计分析方法对洪水遭遇只是进行定性的分析, 无法定量估计不同重现期下洪水的遭遇概率。干支流洪水遭遇之间存在一定的相关关系, 是一个多变量频率组合问题。Copula 函数是一种有效构造联合分布的方法, 因其能够有机结合随机变量之间的相关程度, 且模型形式灵活、不受限于边缘分布的形式, 近年来被广泛用于干旱特征^[5,6]、设计洪水^[7,8]、洪水遭遇分析^[9,10]等方面的研究。闫宝伟等^[11]考虑洪水发生时间与量级的联合分布, 得到了长江与清江同频率洪水的日遭遇风险图及洪水遭遇两个峰值点的风险图。郭晓亮等^[12]采用 Copula 函数分析了嫩江与第二松花江的洪水遭遇情况, 并与统计方法进行了对比。以上的研究大多仅考虑两站的洪水遭遇, 而实际上干支流的洪水遭遇的是干支流洪水发生时间和量级共同作用的结果。陈璐等^[13]引入多维非对称型 Gumbel Copula 函数, 分析了金沙江屏山站、岷江高场站、嘉陵江北碚站和长江宜昌站的干支流遭遇情况。目前对川江干支流洪水遭遇情况的研究多为统计分析, 缺乏对川江干支流洪水遭遇情况的定量分析。考虑到川江汛期受暴雨影响强度大范围广, 川江干流与支流嘉陵江、乌江洪水互相遭遇易形成峰高量大的川江洪水, 本文以川江干支流为研究对象, 引入 Archimedean Copula 函数, 分别构造干流与支流以及支流与支流之间洪水发生时间和洪水量级的联合分布, 对川江洪水遭遇情况进行全面分析, 为流域梯级水库防洪调度方式的建立提供技术支撑, 充分发挥水库群的防洪效益。

1 研究区概况

川江河段位于东亚副热带季风区, 受季风气候影响较大。长江干流的宜宾至宜昌河段, 即川江河段, 宜宾、泸州、重庆等城市均为该河段的主要防洪对象。川江河段的防洪任务为提高宜宾、泸州主城区的防洪标准至 50a 一遇, 尽量提高重庆主城区

¹作者简介: 李继清(1972~), 女, 教授, 主要研究方向为水文学及水资源。E-mail: jqli6688163.com

基金项目: 国家重点研发计划项目(2016YFC0402208;2017YFC0405906)

的防洪标准至 100a 一遇^[14]。四川盆地的西部和东北部因多高山地形影响,有利于西南气流聚集,是长江流域内显著的暴雨中心^[15]。当汛期来临时,川江河段常发生强度大、覆盖面积广的暴雨,川江干流、嘉陵江、乌江洪水互相遭遇,易形成峰高量大的组合洪水,川江及其水文控制站点如图 1 所示。图中川江干支流四个水文站中,朱沱站(29° 00' N, 105° 50' E)和寸滩站(29° 37' N, 106° 36' E)位于川江干流,朱沱站至川江干流与嘉陵江汇合处之间无较大的支流汇入,可作为川江干流与嘉陵江遭遇的控制站;寸滩站位于干流与嘉陵江、乌江汇合口之间,作为与乌江遭遇之前川江干流控制站点的同时可监测嘉陵江汇入川江后的水情变化规律和河流水文特性。北碚站(29° 49' N, 106° 28' E)位于支流嘉陵江,集水面积约 15×10⁴km²,距河口距离约 54.6km,可作为嘉陵江汇合前的控制站。武隆站(29° 19' N, 107° 45' E)位于支流乌江,集水面积 8×10⁴km²,在下游约 60km 处涪陵汇入川江,可作为乌江到达汇合口前控制站。为分析川江干支流之间的洪水遭遇情况,考虑到川江干支流洪水洪峰遭遇为各洪源洪峰在下游汇合口同日出生,川江流域多为山区性河流,洪水主要由暴雨形成,洪水涨落快,峰型尖瘦,洪量较为集中,故包含洪峰的最大 1 日洪量对于描述洪水的剧烈程度具有一定代表性。本文选取川江干流朱沱站、寸滩站,支流嘉陵江北碚站和乌江武隆站 4 个控制站 1954~2016 年日径流资料,通过年最大选样得到各控制站的年最大洪水发生时间序列记为 T_z, T_c, T_b, T_w, 年最大洪水量级序列记为 Q_z, Q_c, Q_b, Q_w, 分别从时间和量级上建立干支流联合分布对洪水遭遇情况进行分析。

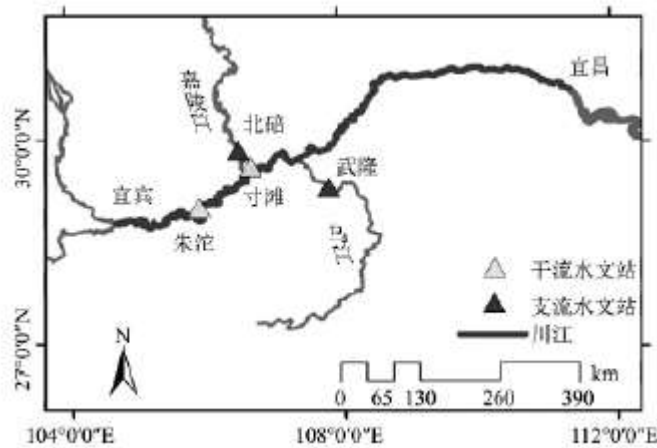


图 1 川江及其水文站点位置图

2 研究方法

考虑干支流洪水遭遇中洪水发生时间和洪水量级的相关性,本文采用二维 Archimedean Copula 函数进行干支流洪水遭遇分析:首先选取混合 VonMises 分布用于拟合洪水发生时间的边缘分布,通过相关系数法计算两序列联合分布的参数,利用离差平方和准则法进行拟合优度检验得到最佳的 Copula 函数即洪水发生时间的联合分布,分析洪水发生时间遭遇情况;其次用 P-III 型分布来拟合洪水量级序列,同理得到干支流遭遇洪水量级的联合分布,结合洪水发生时间和洪水量级对干支流洪水遭遇情况进行分析。

2.1 洪水发生时间的边缘分布

洪水发生时间是一种具有时间周期性的随机变量,可用方向数据来间接描述,转换公式如下所示:

$$x_j = 2\pi \times \frac{j}{L} \quad (1)$$

式中: x_j 表示第 j 天对应的角度; L 表示时间随机变量的周期长度。

考虑到洪水发生时间的方向数据一般呈多峰现象, 本文选用混合 VonMises 分布^[16,17] 函数进行拟合, 即将多个单一的 Von Mises 分布按照一定比例叠加所得。其密度函数表达式如公式 (2) 所示:

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{2\pi I_0(k_i)} \exp(k_i \cos(x - \mu_i)),$$

$$\mu_i \in [0, 2\pi), k_i \in (0, +\infty) \quad (2)$$

式中: i 代表混合 Von Mises 分布的各组成成分, p_i 是其混合的比例; μ_i 和 k_i 分别为各组成成分的位置参数(平均角)与尺度参数, $I_0(k_i)$ 表示第一类 0 阶修正的 Bessel 函数。

一般认为年最大洪水发生时间遭遇意味着两者发生在同一天, 因此可定义两者年最大发生时间在第 i 天遭遇的风险为:

$$p_i^i = P(t_i \leq T_1 < t_{i+1}, t_i \leq T_2 < t_{i+1})$$

$$= F_T(t_i, t_i) + F_T(t_{i+1}, t_{i+1}) -$$

$$F_T(t_{i+1}, t_i) - F_T(t_i, t_{i+1}) \quad (3)$$

式中: p_i^i 代表两江年最大洪水发生时间在第 i 天遭遇的风险; $F_T(t_i, t_i)$ 为两江年最大洪水分别发生在第 i 天和第 j 天前发生的联合概率值。

2.2 洪水量级的边缘分布

分析洪水遭遇对下游防洪的影响需要加入洪水量级的考虑, 因此需要对洪水量级的遭遇进行分析。根据《水利水电工程设计洪水计算规范》^[18], 本文采用 P-III 型分布拟合年最大洪水量级, 其概率密度是一条一端有限而另一端无限的偏态、单峰曲线, 公式如下所示:

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} (x - \delta)^{\alpha-1} e^{-\beta(x-\delta)} \quad (4)$$

式中: $\Gamma(\alpha)$ 为伽马函数, α 为形状参数, β 为尺度参数, δ 为位置参数。且 α 、 β 、 δ 可采用总体统计特征值线性矩法估计得到, 计算公式如下所示:

$$\alpha = \frac{4}{C_s^2}, \quad \beta = \frac{2}{\mu C_s C_s}, \quad \delta = \mu \left(1 - \frac{2C_s}{C_s}\right) \quad (5)$$

根据遭遇两站年最大洪水量级的联合分布, 可得遭遇两站的年最大洪水量级遭遇概率:

$$P^p = P(Q_1 > q_1, Q_2 > q_2) = 1 - F_{Q_1}(q) - F_{Q_2}(q) + C(F_{Q_1}(q), F_{Q_2}(q)) \quad (6)$$

考虑到洪水发生时间和量级之间的相关性较小，可认为二者相互独立，因此本文将洪峰发生量级日遭遇的风险 P 用二者乘积表示，即：

$$P = P^T \times P^p \quad (7)$$

2.3 Copula 函数

Copula 理论最早由 Sklar^[19] 在 1959 年提出，其通过描述多个变量之间的相关关系，可将多个变量的联合分布与各个变量的边缘分布联合起来，又称连接函数。一个 n 维 Copula 函数即为 [0, 1]ⁿ 到 [0, 1] 的映射，设有 n 个随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ ，存在唯一的 Copula 函数 C，使得其多元联合分布 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 与边缘分布 $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)$ 满足：

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C[F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)] \quad (8)$$

Copula 函数一般分为 Archimedean Copula 函数、meta-elliptical Copula 函数 quadratic Copula 函数和 cubic Copula 函数^[20~22]。根据其可交换性又分为对称型和非对称型，如一参数的 Archimedean Copula 函数为对称型。其中对称型 Archimedean Copula 函数因其结构简单、参数少、易于求解的优点，在多变量水文分析得到了广泛应用^[21~23]，常用的形式有 Gumbel-Hougaard Copula 函数(简称 GHCopula 函数)、Frank Copula 函数及 Clayton Copula 函数。

Copula 函数参数估计方法^[24]通常有相关系数法，矩估计方法，非参数核密度估计法和极大似然法。相关系数法主要应用于求解二维 Copula 函数参数，即根据变量样本数据的 Kendall 秩相关系数 τ 进行 Copula 函数参数 θ 的推求。本文通过二维 Copula 函数构建联合分布，选用相关系数法求解参数。

运用不同 Copula 函数构建模型后需要进行拟合优度检验选取刻画变量相关关系最为准确的 Copula 函数，通常采用图形评价法^[25]、AIC 信息准则法和离差平方和准则法(OLS 法)。图形评价法通过观测经验频率与理论频率的点距与 45° 线的接近程度来判断拟合优度，主观因素较强；AIC 信息准则与 OLS 法是通过计算 AIC 值和 OLS 值来判断优劣，更加客观合理。因此本文采用离差平方和最小准则(OLS)进行拟合优度检验，OLS 值的计算如公式(9)所示：

$$OLS = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [F_{emp}(i) - C_0(i)]^2} \quad (9)$$

式中：N 为样本容量， F_{emp} 为多元联合分布经验频率值， C_0 为 Copula 多元联合分布理论频率值，其中 F_{emp} 计算如公式(10)所示：

$$F_{emp}(x_i, y_i) = \frac{n_i - 0.44}{N + 0.12} \quad (10)$$

式中: n_i 为样本中同时满足 $X_j \leq x_i, Y_j \leq y_i$ 的联合观测值个数。OLS 值越小则表明 Copula 函数的拟合效果越好。

3 结果分析

3.1 洪水发生时间遭遇分析

对 T_z, T_c, T_b, T_w 采用混合 Von Mises 分布进行拟合, 采用拟牛顿法对参数进行寻优得到与实测拟合最优的结果。给出了 $n=3$ 时的各参数、与实测频率拟合的均方根误差(RMSE)。4 个控制站混合 VonMises 分布的 RMSE 值均较小, 混合 Von Mises 分布可较好地拟合年最大洪水发生时间。

T_z, T_c, T_b, T_w 的拟合结果如图 2 所示, 易知混合 Von Mises 函数能够很好地描述 T_z, T_c, T_b, T_w 的多峰特征。朱沱站洪水发生时间有 3 个峰值, 从大到小依次为 7 月中旬、8 月中旬和 9 月上旬; 寸滩站洪水发生时间有两个峰值, 从大到小依次为 7 月中旬和 9 月上旬; 北碚站洪水发生时间的两个峰值从大到小依次为 7 月中旬和 9 月上旬, 武隆站洪水发生时间的两个峰值从大到小依次为 6 月下旬和 7 月中旬。就年最大洪水发生时间而言, 川江干流与嘉陵江趋于同步, 川江干流与乌江、嘉陵江与乌江同步程度均较低。

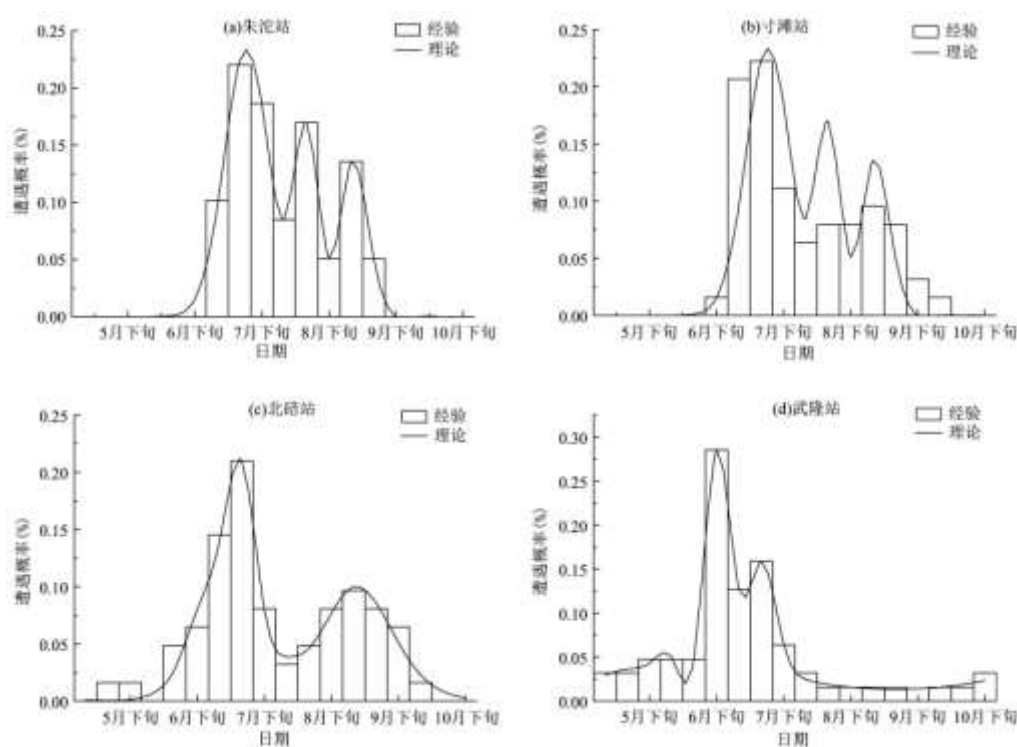


图 2 年最大洪水发生时间概率密度

计算 T_z 与 T_b 、 T_c 与 T_w 、 T_b 与 T_w 的 Kendall 秩相关系数 τ 分别为 -0.0620、0.2069 以及 0.2136, 可知三组均存在一定的弱的相关性, 进一步求解各联合分布的参数和 OLS 值。选取 OLS 值最小的 Copula 函数, 川江干流与嘉陵江、川江干流与乌江及嘉陵江与乌江的年最大洪水发生时间可分别用 Frank Copula 函数、FrankCopula 函数、ClaytonCopula 函数构建联合分布, 如公式 (11)~(13) 所示:

$$C(F_{T_Z}(t), F_{T_B}(t)) = \frac{1}{0.560} \ln \left[1 + \frac{\exp(0.560F_{T_Z}(t) - 1) (\exp(0.560F_{T_B}(t)) - 1)}{\exp(0.560) - 1} \right] \quad (11)$$

$$C(F_{T_C}(t), F_{T_W}(t)) = \frac{1}{1.930} \ln \left[1 + \frac{\exp(1.930F_{T_C}(t) - 1) (\exp(1.930F_{T_W}(t)) - 1)}{\exp(-1.930) - 1} \right] \quad (12)$$

$$C(F_{T_B}(t), F_{T_W}(t)) = [F_{T_B}(t)^{-0.543} + F_{T_W}(t)^{-0.543} - 1]^{\frac{1}{-0.543}} \quad (13)$$

式中： $T_{T_Z}(t)$ 、 $T_{T_B}(t)$ 、 $T_{T_C}(t)$ 、 $T_{T_W}(t)$ 分别为朱沱、北碚、寸滩、武隆的峰现时间边缘分布。

由公式(3)计算各组洪水发生时间在5~10月的日遭遇概率如图3所示，易知川江干流和嘉陵江洪峰在7月上旬至7月下旬和9月上旬至9月中旬最易遭遇；川江干流和乌江洪峰在6月下旬和7月上旬至7月中旬最易遭遇；嘉陵江和乌江洪峰在6月中旬至7月下旬最易遭遇。计算累积洪峰遭遇概率可以得到川江干流与嘉陵江、川江干流与乌江及嘉陵江与乌江年最大洪水遭遇的概率为0.035、0.014和0.012，与实测资料统计的遭遇频率0.032、0.016、0.016较为接近。川江洪水多由暴雨形成，下游形成洪水较上游更早，因而嘉陵江与乌江洪水发生时间遭遇最早，其次为川江干流和乌江，川江干流和嘉陵江最晚。从年遭遇概率上来看，从大到小依次为川江干流与嘉陵江、川江干流和乌江、嘉陵江和乌江。

3.2 洪水量级遭遇分析

采用P-III型分布拟合的参数所示，拟合度均在0.98及以上，因此P-III型分布可较好地拟合 Q_z 、 Q_c 、 Q_b 、 Q_w 。

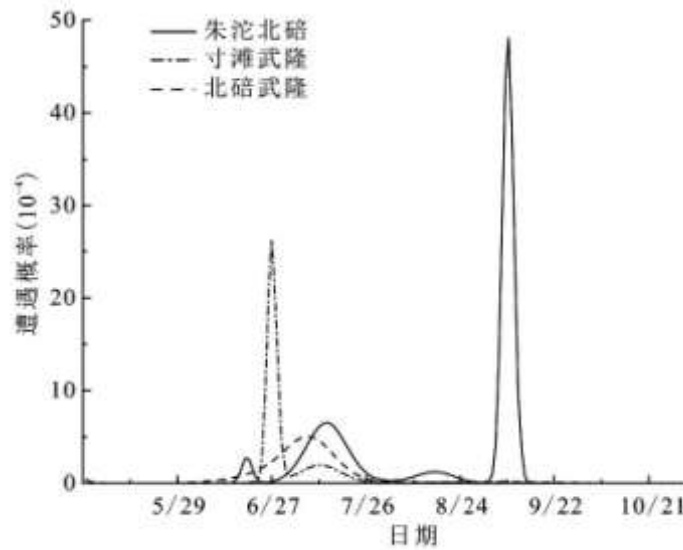


图3 年最大洪水发生时间遭遇概率

计算 Q_z 与 Q_b 、 Q_c 与 Q_b 、 Q_b 与 Q_w 的Kendall秩相关系数分别为0.0514、0.0072和-0.1999，可知三组均存在一定的弱的相关性，进一步求解各联合分布的参数和OLS值。各OLS值判断拟合效果，分别选择GH Copula函数、Clayton Copula函数、Frank Copula函数构建三组联合分布见公式(14)~(16)。

$$C(F_{Q_Z}(q), F_{Q_R}(q)) = \exp\{-[-\ln F_{Q_Z}(q)]^{1.054} + (-\ln F_{Q_R}(q))^{1.054}\}^{\frac{1}{1.054}} \quad (14)$$

$$C(F_{Q_C}(q), F_{Q_W}(q)) = [F_{Q_C}(q)^{-0.015} + F_{Q_W}(q)^{-0.015} - 1]^{\frac{1}{0.015}} \quad (15)$$

$$C(F_{Q_R}(q), F_{Q_W}(q)) = -\frac{1}{1.860} \ln \left[1 + \frac{(e^{1.860F_{Q_R}(q)} - 1)(e^{1.860F_{Q_W}(q)} - 1)}{e^{1.860} - 1} \right] \quad (16)$$

式中： $F_{Q_Z}(q)$ 、 $F_{Q_R}(q)$ 、 $F_{Q_C}(q)$ 、 $F_{Q_W}(q)$ 分别为朱沱、北碚、寸滩、武隆的年最大洪水量级边缘分布。

由此得到川江干流与嘉陵江、川江干流与乌江以及嘉陵江与乌江不同年最大洪水量级下的遭遇概率。易知 3 种情况下两江同为千年一遇洪水遭遇的概率依次为 7.07×10^{-5} 、 1.01×10^{-6} 、 3.44×10^{-7} ，两江同为百年一遇洪水遭遇概率依次为 7.88×10^{-4} 、 1.01×10^{-4} 、 3.49×10^{-5} 。总体而言，川江干流与嘉陵江的遭遇概率较大，川江干流与乌江、嘉陵江与乌江的遭遇概率较小，其中川江干流与乌江遭遇概率略大于嘉陵江与乌江。

分别选取汛期中 3 种洪水组合洪水发生时间遭遇概率峰值为 9 月 8 日、6 月 27 日和 7 月 8 日，计算 3 者峰值遭遇不同量级洪水的概率如图 4 所示。3 种洪水遭遇峰值千年一遇洪水遭遇的概率依次为 3.399×10^{-7} 、 0.027×10^{-7} 、 0.002×10^{-7} ，百年一遇洪水遭遇概率依次为 37.875×10^{-7} 、 2.679×10^{-7} 、 0.117×10^{-7} 。由图可知，峰值下川江干流与嘉陵江的遭遇概率较川江干流与乌江高一个数量级左右，较嘉陵江与乌江高两个数量级。从不同量级的占比来看，川江干流与嘉陵江发生遭遇中洪水量级较大的占比大于另外两种情况，由此可知川江干流与嘉陵江大洪水遭遇概率较大，遭遇情况较严重，川江干流与乌江、嘉陵江与乌江的洪水遭遇以中小洪水为主，遭遇情况较轻微。川江干流的洪水由暴雨形成，5 月暴雨中心位于 $18^\circ \text{N} \sim 20^\circ \text{N}$ ，乌江降水较多，嘉陵江与川江干流较少；6~7 月，暴雨主要出现在乌江；7~8 月，暴雨中心向上游移动，乌江降水减少。从暴雨特性来看，嘉陵江与川江干流出现暴雨的概率最大，乌江与川江干流出现暴雨的概率最小。嘉陵江、乌江与干流的汇合口洪水传播时间为 12h 左右，故嘉陵江与乌江的洪水遭遇概率也相应有所减小。因此，从暴雨洪水的形成和地区分布来看，遭遇概率从大到小依次为川江干流与嘉陵江、川江干流与乌江、嘉陵江与乌江，这与 Copula 函数计算的结果较为一致。

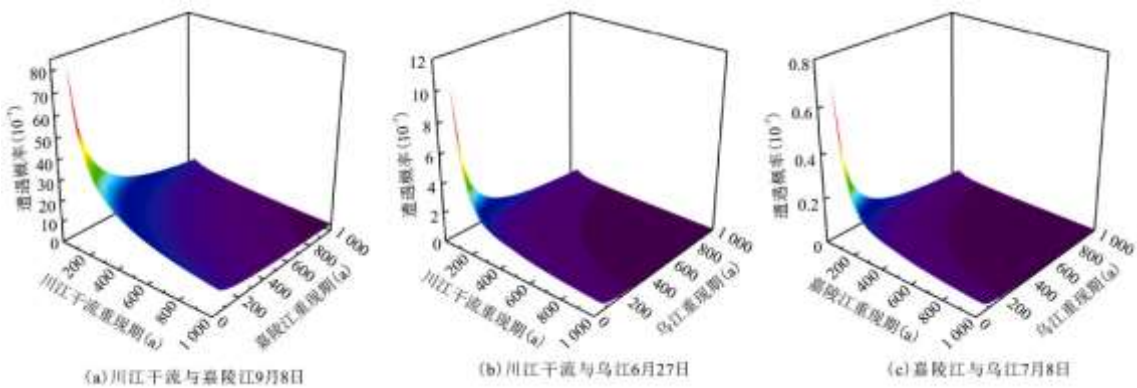


图 4 年最大洪水发生时间遭遇概率峰值风险图

3 结论

针对川江干支流的洪水遭遇问题, 利用二维联合分布的建模思想以及 Copula 函数在解决多变量水文分析计算中的优越性, 引入 Archimedean Copula 函数分别建立了干支流洪水遭遇时间和量级的联合分布, 计算了年最大洪水汛期每日遭遇的概率和发生量级遭遇的概率, 并得到了两江洪水发生时间遭遇峰值的风险图。经对比分析结果表明: (1) 从洪水发生时间遭遇来看: 遭遇概率由高到低依次为长江上游与嘉陵江、长江上游与乌江、嘉陵江与乌江, 且乌江与长江上游、嘉陵江的洪水发生遭遇较早, 集中在 6~7 月, 长江上游与嘉陵江的洪水发生遭遇较晚, 9 月仍有较大的遭遇概率; (2) 从洪水量级遭遇来看: 洪水量级的遭遇概率与洪水发生时间遭遇有较好的同步性, 且长江上游与嘉陵江遭遇的量级较大, 乌江与长江上游、嘉陵江发生遭遇以中小量级洪水为主。通过 Copula 函数建模计算川江干支流洪水发生时间和量级的遭遇概率, 填补了川江干支流洪水遭遇的不足, 可为认识川江洪水遭遇规律, 从而制定川江河段合理的防洪调度方式提供参考依据。

参考文献:

- [1]高慧琴, 代健, 沈艳, 等. 西江流域洪水组成与遭遇分析[J]. 人民珠江, 2017, 38(7):18-21.
- [2]戴明龙, 沈燕舟. 川江干流与洞庭湖洪水遭遇规律研究[J]. 水资源与水工程学报, 2010, 21(6):117-120.
- [3]熊莹. 长江上游干支流洪水组成与遭遇研究[J]. 人民长江, 2012, 43(10):42-45.
- [4]张新田, 邵骏, 郭卫. 雅砻江与川江洪水地区组成及遭遇规律分析[J]. 人民长江, 2018, 49(22):23-27, 63.
- [5]于忱, 陈隽, 王红瑞, 等. 多变量 Copula 函数在干旱风险分析中的应用进展[J]. 南水北调与水利科技, 2018, 16(1):14-21.
- [6]周念清, 李天水, 刘铁刚. 基于游程理论和 Copula 函数研究岷江流域干旱特征[J]. 南水北调与水利科技, 2019, 17(1):1-7.
- [7]李建昌, 李继清. 应用超阈值抽样及 Copula 函数推求水库设计洪水[J]. 水文, 2018, 38(2):1-7.
- [8]甘富万, 张华国, 黄宇明, 等. 干、支流洪水作用下洪水组合样本的选择对防洪设计的影响[J]. 南水北调与水利科技, 2019, 17(5):180-187.
- [9]ZHANG L, SINGH V P. Bivariate flood frequency analysis using the copula method[J]. Journal of Hydrologic Engineering, 2006, 11(2):150-164.
- [10]CHOWDHARY H, ESCOBAR L A, SINGH V P. Identification of suitable copulas for bivariate frequency analysis of flood peak and flood volume data[J]. Hydrology Research, 2011, 42(2-3):193-216.
- [11]闫宝伟, 郭生练, 陈璐, 等. 长江和清江洪水遭遇风险分析[J]. 水利学报, 2010, 41(5):553-559.
- [12]郭晓亮, 李贵阳, 孙亚楠, 等. 嫩江、松花江洪水遭遇情况[J]. 南水北调与水利科技(中英文), 2020, 18(5):102-108, 114.
- [13]陈璐, 郭生练, 张洪刚, 等. 长江上游干支流洪水遭遇分析[J]. 水科学进展, 2011, 22(3):323-330.

-
- [14]陈桂亚. 长江上游控制性水库群联合调度初步研究[J]. 人民长江, 2013, 44(23):1-6.
- [15]范可旭, 徐长江. 乌江洪水与长江三峡洪水遭遇研究[J]. 水文, 2010, 30(4):63-65.
- [16]陈家骅, 李鹏飞, 谭鲜明. 混合 von Mises 模型的参数估计[J]. 系统科学与数学, 2007, 27(1):59-67.
- [17]CARTA J A, BUENO C, RAM REZ P. Statistical modelling of directional wind speeds using mixtures of von Mises distributions: Case study[J]. Energy Conversion and Management, 2008, 49(5):897-907.
- [18]中华人民共和国水利部. 中华人民共和国水利行业标准: 水利水电工程设计洪水计算规范 SL44-2006[S]. 北京: 中国水利水电出版社, 2006:7-8.
- [19]SKLAR A. Fonctions de repartition a n dimentions et leurs marges[J]. Publication de l' Institut de Statistique de l' Universite de Paris, 1959:229-231.
- [20]JOE H. Multivariate models and dependence concepts[M]. Chapman&Hall, London, 1997.
- [21]NELSON R B. An introduction to Copulas[M]. Springer, New York, 1999.
- [22]熊立华, 郭生练, 肖义, 等. Copula 联结函数在多变量水文频率分析中的应用[J]. 武汉大学学报(工学版), 2005, 38(6):16-19.
- [23]郭生练, 闫宝伟, 肖义, 等. Copula 函数在多变量水文分析计算中的应用及研究进展[J]. 水文, 2008, 28(3):1-7.
- [24]GENEST C, RIVEST L, Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas[J]. Journal of the American Statistical Association, 1993, 88(423):1034-1043.
- [25]李天元. 基于 Copula 函数的设计洪水计算方法研究[D]. 武汉: 武汉大学, 2014.